КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ

МУРМАНСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ИНСТИТУТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ И КУЛЬТУРЫ

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ В МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ В 2007 ГОДУ

Мурманск
2007

КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ

МУРМАНСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ИНСТИТУТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ И КУЛЬТУРЫ

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ
ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
ПО МАТЕМАТИКЕ
В МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
В 2007 ГОДУ

Мурманск
2007

***Печатается по решению редакционно-издательского совета
Мурманского областного института повышения
квалификации работников образования и культуры***

Автор-составитель **Н. А. Малахова,** доцент кафедры естественно-математического и профессионального образования

Анализ результатов единого государственного экзамена по математике в Мурманской области в 2007 году / Автор-составитель Н.А. Малахова – Мурманск, 2007. – 44 с.

В сборник включены аналитические материалы результатов единого государственного экзамена в Мурманской области в 2007 году.

Материалы сборника предназначены руководителям и специалистам органов управления образованием, руководителям и педагогическим работникам образовательных учреждений.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Характеристика контрольных измерительных материалов 2007 г.

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике рассматривается в качестве одного из составляющих элементов создающейся общероссийской системы оценки качества образования. Полученные в его ходе результаты позволяют проанализировать различные стороны общеобразовательной подготовки выпускников, выявить причины обнаруженных недостатков, наметить пути совершенствования образовательного процесса и учебно-методического обеспечения учебных предметов в целях повышения его эффективности.

Реализация вышеуказанных целей позволяет объективно оценить результаты освоения выпускниками средней (полной) школы Федерального компонента государственного образовательного стандарта общего (полного) образования по математике.

Получение достаточно полной, объективной картины состояния математической подготовки участников ЕГЭ-2007 обеспечивалось включением в варианты КИМов основных вопросов содержания из всех крупных блоков, выделенных в программе основной и средней (полной) школы: выражения и преобразования; уравнения и неравенства; функции; числа и вычисления; геометрические фигуры, их свойства и измерение геометрических величин. При этом в содержание проверки были включены только те вопросы, которые зафиксированы в основных нормативных документах – в частности Федеральный компонент государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования по математике. Включение в каждый из вариантов КИМов заданий, различающихся по тематике и уровню сложности, позволило обеспечить достаточно представительную проверку владения обучающимися материалом каждого из пяти указанных блоков на разных уровнях усвоения.

По сравнению с 2006 годом в структуру работы, назначение частей, число и типы используемых в ней заданий не внесено никаких изменений. То есть задания каждого варианта КИМов распределялись (табл. 1) на три части (часть 1, часть 2, часть 3) и в зависимости от проверяемого умения при разработке соответствующего задания использовалась одна из следующих форм: с выбором ответа (часть А), с кратким ответом в виде некоторого целого числа или числа, записанного в виде десятичной дроби, (часть В) и с развернутым ответом (часть С).

Распределение типов заданий по частям работы в 2007 г.

Таблица 1

№	Части работы	Тип задания	Число заданий	Максимальный первичный балл	% максимального первичного балла от максимального первичного балла за всю работу
1	Часть 1: А1-А10	с выбором ответа	10	10x1=10	27%
2	Часть 1: В1-В3, Часть 2: В4-В11	с кратким ответом	11	11x1=11	30%
3	Часть 2: С1, С2, Часть 3: С3-С5	с развёрнутым ответом	5	2x2+3x4=16	43%
	Итого:	**3**	**26**	**37**	**100%**

В 2007 году обучающимся было предложено 15 вариантов работ.

Варианты экзаменационной работы составлены на основе нескольких планов, которые являются вариантами общего плана (см. спецификацию экзаменационной работы по математике ЕГЭ 2007 г.), в котором дана номенклатура заданий каждой из частей 1; 2; 3, уровень сложности, планируемая трудность (в %), максимальный предварительный балл, примерное время выполнения. Параллельность вариантов обеспечивается на этапе разработки экзаменационной работы и достигается за счёт:

– отбора в каждую из трёх частей работы заданий, содержание, уровень сложности и тип которых определяются планом работы;
– включения взаимозаменяемых, однотипных, примерно одинаковых по тематике и уровню сложности заданий, расположенных на одних и тех же местах в вариантах работы, составленных по одному и тому же плану.

На выполнение 26 заданий, включенных в варианты КИМов, отводилось, как и в 2006 году, 4 часа (240 минут). Для решения почти всех заданий работы требовалось не только провести необходимые рассуждения, но и выполнить некоторые действия, которые в зависимости от сложности и формы задания и уровня подготовки выпускника занимали различное время – от 1-3 до 30 минут и более.

Ниже, в таблице 2, представлено распределение контролируемого материала по выделенным крупным блокам содержания.

Распределение заданий по блокам содержания за период с 2004 по 2007 г.

Таблица 2

№	Блок содержания	Год	Число заданий	Максимальный первичный балл	% максимального первичного балла от максимального первичного балла за всю работу
1	Выражения и преобразования	2004	5	5	13%
		2005	6	6	15%
		2006	5	5	13%
		2007	5	5	13%
2	Уравнения и неравенства	2004	7	10	26%
		2005	6	10	27%
		2006	7	11	30%
		2007	9	16	43%
3	Функции	2004	11	17	44%
		2005	10	14	38%
		2006	10	14	38%
		2007	8	9	25%
4	Числа и вычисления	2004	1	1	2%
		2005	1	1	3%
		2006	1	1	3%
		2007	1	1	3%
5	Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических	2004	3	6	15%
		2005	3	6	16%
		2006	3	6	16%

	фигур.	2007	3	6	16%
Итого:		**2004**	**27**	**39**	**100%**
		2005	**26**	**37**	**100%**
		2006	**26**	**37**	**100%**
		2007	**26**	**37**	**100%**

Соотношение между числом алгебраических и геометрических заданий и распределение алгебраических заданий по первым трем блокам содержания обусловлено традиционным содержанием выпускного и вступительного экзаменов, а также значимостью проверяемого материала. Включение только одного задания по тематике блока 4 объясняется тем, что его материал проверяется опосредованно при выполнении заданий, относящихся к трем первым блокам.

В экзаменационной работе 2007 года по сравнению с 2006 годом незначительно изменилось распределение заданий, ориентированных на проверку овладения определёнными видами деятельности (таблица 3).

Распределение заданий по видам деятельности за период с 2004 г. по 2007 г.

Таблица 3

Виды деятельности	Год	Число заданий	Максимальный первичный балл	% максимального первичного балла от максимального первичного балла за всю работу
Знать и понимать	2004	4	4	10%
	2005	4	4	11%
	2006	4	4	11%
	2007	5	5	14%
Применять знания и умения в знакомой ситуации	2004	11	11	28%
	2005	10	10	27%
	2006	10	10	27%
	2007	10	10	27%
Применять знания и умения в изменённой ситуации	2004	8	8	21%
	2005	9	11	30%
	2006	9	11	30%
	2007	8	10	27%
Применять знания и умения в новой ситуации	2004	4	16	41%
	2005	3	12	32%
	2006	3	12	32%
	2007	3	12	32%
Итого:	**2004**	**27**	**39**	**100%**
	2005	**26**	**37**	**100%**
	2006	**26**	**37**	**100%**
	2007	**26**	**37**	**100%**

Экзаменационная работа направлена на проверку уровня сформированности следующих умений:

- проводить доказательные рассуждения, логически обосновывать выводы, использовать различные языки математики для иллюстрации, интерпретации, аргументации и доказательства;
- владеть стандартными математическими алгоритмами действий и методами решений;
- решать широкий класс задач из различных разделов курса, осуществлять поисковую и творческую деятельность при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач;
- конструировать способы решения и выбирать оптимальный из них;
- использовать несколько приёмов при решении комбинированных задач;
- применять соответствующие правила, формулы, свойства для описания математических объектов;
- составлять математическую модель предложенной в задаче ситуации;
- выполнять тождественные преобразования, в том числе для рационализации вычислений;
- проводить математические расчёты;
- владеть методами математического анализа в объёме, позволяющем исследовать элементарные функции и решать задачи;
- проводить исследование функций элементарными методами;
- владеть техникой решения уравнений, неравенств, их систем, применяя аналитические и графические методы решения;
- применять содержательный смысл понятий теории дифференциального исчисления для анализа математических ситуаций;
- применять метод составления уравнений и арифметический метод при решении текстовых задач;
- строить геометрические конфигурации;
- знать свойства плоских фигур, пространственных тел и уметь использовать их для вычисления значений искомых геометрических величин.

Часть 1 нацелена на проверку усвоения материала только курса алгебры и начал анализа 10-11 классов на базовом уровне и включает половину всех заданий работы – 13 заданий обязательного уровня, при выполнении которых от обучающихся требовалось применить свои знания в знакомой ситуации. Эти задания были типичными для той или иной темы, методы их решения хорошо известны обучающимся, а сами решения отрабатывались в процессе обучения. Первые 10 заданий (А1-А10) были заданиями с выбором ответа из 4 предложенных вариантов, остальные 3 задания (В1-В3) – заданиями с кратким ответом в виде целого числа или десятичной дроби. Использование последней формы задания для проверки умения решать простейшие уравнения разного типа (В1 и В2), а также понимания геометрического и физического смысла производной и применения этих знаний (В3) позволило сохранить стандартную редакцию подобных заданий и тем самым обеспечить обязательный уровень их сложности, отвечающий назначению части 1 работы.

Часть 2 проверяла усвоение некоторых вопросов содержания из различных разделов курса математики 7-11 классов. Она содержала 10 различных по сложности заданий повышенного уровня: 8 алгебраических, из которых 7 – по курсу алгебры и начал анализа, 1 – текстовая задача (на проценты, прогрессии, движение и др.), и 2 – геометрических (одно – планиметрическое, другое – стереометрическое). При их выполнении от обучающихся требовалось применить знания в измененной ситуации, используя при этом методы, известные им из школьного курса математики. Первые 8 заданий были составлены в форме заданий с кратким ответом, два последних, алгебраических задания (С1 и С2) были заданиями с развернутым ответом, при выполнении которых требовалось записать полное решение, но не требовалось приводить обоснование выполненных действий.

В часть 3 были включены 3 задачи высокого уровня сложности. (2 алгебраических и 1 стереометрическая), требующие записи обоснованного развернутого ответа. Первая из них по уровню сложности примерно соответствовала сложности задач на приемных экзаменах в большинстве вузов, в которых математика изучается, но не является одним из основных предметов. Две остальные задачи рассчитаны на обучающихся, предполагающих обучаться в вузах, где предъявляются высокие требования к математической подготовке выпускников, где математика изучается углубленно и интенсивно используется при изучении других предметов. Сложность заданий этой части определяется тем, что для их решения необходимо использовать знания материала из различных разделов курса математики средней (полной) школы. При этом требуется не только найти ответ на поставленный вопрос, но и обосновать полученные выводы, построить логически правильную цепочку рассуждений и математически грамотно записать решение. В записи решения сделанные выкладки должны быть последовательны и логичны, переходы к следующему шагу решения обоснованны, выводы подкреплены ссылками на изученные свойства или признаки математических объектов, на изученные формулы, а математические термины и символы использованы корректно.

В таблице 4 представлено распределение заданий по уровню сложности.

Распределение заданий по уровню сложности за период с 2004 по 2007 г.

Таблица 4

Уровень сложности задания	Проверяемый учебный материал курсов математики	Год	Тип задания	Число заданий	Максимальный первичный балл	% максимального первичного балла от максимального первичного балла за всю работу
Базовый	Алгебра и начала анализа 10-11	2004	A1-A14	14	14	36%
		2005	A1-A10, B1-B3	13	13	36%
		2006	A1-A10, B1-B3	13	13	36%
		2007	A1-A10, B1-B3	13	13	36%
Повышен-ный	Математика 5-6 Алгебра 7-9 Алгебра и начала анализа 10-11 Геометрия 7-11	2004	B1-B9	9	9	23%
		2005	B4B11, C1,C2	10	12	32%
		2006	B4-B11, C1,C2	10	12	32%
		2007	B4B11, C1,C2	10	12	32%
Высокий	Математика 5-6 Алгебра 7-9 Алгебра и начала анализа 10-11 Геометрия 7-11	2004	C1-C4	4	16	41%
		2005	C3-C5	3	12	32%
		2006	C3-C5	3	12	32%
		2007	C3-C5	3	12	32%

Оценка выполнения заданий

Проверка заданий с выбором ответа и с кратким числовым ответом автоматизирована и за верное выполнение любого из этих заданий выставлялся 1 балл.

Выполнение заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровня сложности проверялось экспертной комиссией. Для обеспечения объективности оценки этих заданий были в отдельности разработаны общие критерии оценки алгебраических заданий повышенного уровня (С1 и С2), алгебраических заданий высокого уровня (С3 и С5) и стереометрических задач высокого уровня (С4). Затем на их основе для каждого такого задания были разработаны конкретизированные критерии, учитывающие полноту и правильность образца решения, предложенного для данного задания.

При разработке критериев оценки заданий С1 и С2 учитывались особенности этих задач: проверялось владение известными алгоритмами действий и методами решений, не требовалось выполнять многошаговые преобразования и вычисления, а также применять какой-либо особый, необычный рациональный прием решения. При выполнении шагов решения правильный выбор и применение соответствующих правил, формул и алгоритмов действий или соответствующая переформулировка условия задачи (например, с «графического языка» на аналитический язык, когда нахождение нулей функции «заменяется» на решение уравнения) свидетельствовали об усвоении проверяемого материала и знании границ его применения. В связи с этим критерии оценки выполнения заданий С1 и С2 учитывали правильность выбранных приемов или методов решения, а также выбранных формул, правил и свойств математических объектов и не требовали приведения обоснований выполненных шагов решения. Поэтому в зависимости от полноты и правильности приведенного решения за выполнение заданий повышенного уровня выставлялось от 0 до 2 баллов.

Задания высокого уровня сложности в части 3 в соответствии с такими же общими критериями, как и в 2002-2006 гг., оценивались от 0 до 4 баллов максимально.

Повышению объективности оценки ответов участников экзамена способствовала следующая процедура выставления оценок экспертами. Выполнение каждого задания оценивалось двумя независимыми экспертами. При этом использовались следующие правила: при различии оценок в 1 балл выставлялась большая из этих оценок, при различии в 2 балла выставлялась средняя оценка (среднее арифметическое оценок двух экспертов), при различии более 2 баллов работу проверял третий, как правило, наиболее опытный эксперт, который имел право познакомиться с оценками, выставленными двумя первыми экспертами, и его оценка была окончательной.

Основные результаты экзамена по математике 2007 г.

Для характеристики общих результатов ЕГЭ по математике использовались ряды распределения тестовых отметок или баллов и экзаменационных отметок, полученных участниками экзамена за выполнение вариантов КИМ. Эти две оценки выставлялись с учётом норм, принятых Министерством образования и науки РФ, на основе первичных баллов, полученных обучающимися за выполнение заданий работы. Как в 2006 г., за выполнение всех заданий работы в 2007 г. ученик мог получить максимально 37 первичных баллов.

Тестовая отметка характеризует общую математическую подготовку выпускника по всем курсам математики. Она выставлялась по стобалльной шкале на основе первичных баллов, полученных за все выполненные задания работы.

Экзаменационная отметка характеризует только усвоение материала курса алгебры и начал анализа 10-11 классов. Она выставлялась по используемой в школе пятибалльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение 22-х алгебраических заданий, составленных на материале алгебры и начал анализа.

Для выявления тенденций в изменении состояния математической подготовки выпускников использованы ряды распределения тестовых и экзаменационных отметок, полученных участниками ЕГЭ по математике в 2004-2006 гг.

В 2007 г. в Мурманской области ЕГЭ по математике сдавали 6660 выпускников общеобразовательных учреждений, что на 1305 меньше по сравнению с 2006 г. Отличные и хорошие отметки получили 50,23% обучающихся 11-х классов, а неудовлетворительную подготовку имеют 12,10% (отмеченные показатели лучше прошлогодних на 4,63% и 4,5% соответственно). Основные результаты экзамена по математике в форме ЕГЭ представлены ниже в таблице 5.

Результаты ЕГЭ по математике в Мурманской области за период с 2004 по 2007 гг. (выпускники общеобразовательных учреждений)

Таблица 5

Год	Количество выпускников	Процент верных ответов	% выпускников, получивших соответствующую отметку				Средняя оценка
			«5»	«4»	«3»	«2»	
2004	10164	31,3%	12,3%	37,3%	35,1%	15,4%	3,5
2005	9367	30,5%	11,1%	33,8%	37,1%	18%	3,4
2006	7965	30,1%	9,8%	35,8%	37,8%	16,6%	3,4
2007	6660	34,4%	11,9%	39,3%	36,7%	12,1%	3,5

Как и в 2006 г., выпускники общеобразовательных школ – средний балл 49,6, значительно лучше справились с работой, чем обучающиеся вечерних школ – средний балл 38.

В целом результаты, показанные в 2007 г. девушками – средний балл 51,28 (2006 г. – 49,02) и юношами – средний балл 51,84 (2006 г. – 48,75), не имеют значимых различий;

Сохраняется следующая тенденция: результаты, показанные выпускниками городских школ выше результатов обучающихся сельских школ.

Анализ результатов выполнения экзаменационной работы по математике в 2007 г.

Анализ выполнения заданий части 1.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности в части 1:

- Владение понятием степени с рациональным показателем, умение выполнять тождественные преобразования и находить значение степеней.
- Знание свойств корня n-ой степени, умение выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значения.
- Знание основных тригонометрических тождеств, умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений и находить их значения.
- Знание определения и свойств логарифма, умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений.
- Умение «читать» свойства функции по графику и распознавать графики элементарных функций.
- Умение находить область определения сложной функции.
- Умение находить множество значений функции.
- Использование графиков при решении неравенств.
- Умение решать неравенства с одной переменной на основе свойств функции.
- Владение правилами дифференцирования и таблицей производных элементарных функций.
- Умение решать простейшие иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения.
- Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств.
- Умение решать уравнения с использованием равносильности уравнений.
- Умение применять общие приёмы решения уравнений.

Основные направления анализа результатов выполнения заданий ЕГЭ части 1:

1) Качество знаний обучающихся 2007 года, характеризующее базовую подготовку по курсу алгебры и начал анализа, составило 78,4%. Данный показатель существенно выше идентичного показателя 2006 г. на 9,1%, а если сравнить его с 2004 г. (табл. 6), то наблюдается положительная динамика выполнения алгебраических заданий базового уровня.

Качество знаний базового уровня обучающихся Мурманской области в 2004-2007 гг. по математике

Таблица 6

Год	2004	2005	2006	2007
Качество знаний	67, 2%	67%	69,3%	78,4%

2) В соответствии с экспертной оценкой, представленной в нормативных документах по ЕГЭ, базовый уровень подготовки обучающихся, определяемый решениями заданий части 1, должен составлять 55-85%. Результаты выполнения заданий базового уровня на тождественные преобразования, на решение уравнений и неравенств, по разделу «Функции», приведенные ниже в таблицах 7-9, в школах Мурманской области, как и в предыдущие годы, в основном, соответствуют этим показателям.

Результаты выполнения обучающимися заданий базового уровня в Мурманской области в 2004-2007 гг.

а) тождественные преобразования выражений

Таблица 7

Год	Логарифмы	Тригонометрия	Степени	Корни
2004	73%	66%	78%	77%
2005	80%	72%	76%	74%
2006	78%	49%	87%	80%
2007	86%	47%	86%	84%

б) решение уравнений и неравенств

Таблица 8

Год	Логарифмические уравнения	Тригонометрические уравнения	Показательные уравнения	Иррациональные уравнения	Показательные неравенства	Логарифмические неравенства	Дробно-рациональные неравенства
2004	71%	58%	76%	56%	-	-	68%
2005	79%	59%	69%	58%	69%	54%	73%
2006	63%	53%	64%	45%	67%	47%	-
2007	73%	84%	75%	75%	85%	-	77%

в) «чтение» функции

Таблица 9

Год	Область определения функции	Множество значений функции	Промежутки монотонности функции	Производная функции	Вид чётности функции
2004	53%	59%	82%	72%	-
2005	-	69%	71%	83%	72%
2006	49%	74%	68%	85%	-
2007	74%	87%	-	87%	74%

Данные таблицы свидетельствуют о том, что по сравнению с 2004 и 2006 гг. повысилась результативность выполнения участниками экзамена заданий базового уровня на тождественные преобразования иррациональных выражений и логарифмических выражений. С преобразованиями тригонометрических выражений и выражений, содержащих степень с рациональным показателем, выпускники справились примерно на том же уровне. В то же время, как и в 2006 году, владение умением выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений близко к удовлетворительному: менее половины обучающихся (47%) указали правильный ответ при нахождении значения тригонометрического выражения. Основная причина – незнание основных тригонометрических тождеств.

Средний уровень сформированности базового навыка решения простейших уравнений и неравенств составил в 2007 г. 78,2%, это на 21% выше соответствующего показателя 2006 г. Таким образом, данные таблиц 7-8 позволяют сделать вывод о наметившейся тенденции повышения результативности овладения выпускниками умениями решения простейших уравнений и неравенств, изучаемых в старшей школе. И вместе с тем наметился «прорыв» в овладении методами решения тригонометрических и иррациональных уравнений: обучающиеся продемонстрировали знание аналитической записи решения простейших тригонометрических уравнений, умение осуществлять отбор решений иррациональных уравнений.

Данные таблицы 9 свидетельствуют о том, что выпускники на оптимальном уровне усвоили как технику «чтения» основных свойств функции, так и распознавание видов элементарных функций, опираясь на их определения. Таким образом, около 81% обучающихся продемонстрировали безошибочное овладение предметными компетенциями графического иллюстрирования свойств функций.

3) Поэлементный анализ заданий части 1 ЕГЭ-2007 по математике

Таблица 10

Задание	Элементы содержания	Ступень, на которой формируются данные умения и навыки	
		Основная школа	Средняя школа
А1. Вычислите: $-15*81^{1/4}-19$	Свойства степени с рациональным показателем		+
	Действия с отрицательными числами	+	
А2. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt[5]{a^{24}}}{\sqrt[5]{a^{4}}}$	Свойства арифметического корня n-ой степени		+
	Свойства степени с целым показателем.	+	

	Вычитание натуральных чисел	+	
А3. Найдите значение выражения: $-7\log(9^2)$.	Определение логарифма		+
	Свойства логарифма		+
	Умножение чисел разных знаков.	+	
А4. На рисунке изображен график одной из перечисленных ниже функций. Укажите эту функцию.	Определение функций		+
	Определение свойств функций	+	+
А5. Найдите производную функции $y = x + 0{,}25\,x^4 + 4$	Производная суммы		+
	Производные элементарных функций		+
	Умножение натурального числа на десятичную дробь	+	
А6. Найдите множество значений функции $y = 12 + \cos x$.	Множество значений тригонометрической функции	+	+
	Числовые промежутки, их обозначения	+	
А7. Найдите область определения функции $y = \lg(4 - x^2)$.	Область определения логарифмической функции	+	+
	Числовые промежутки, их обозначения	+	
	Решение квадратного неравенства	+	
А8. На рисунке изображены графики функций y = f (x) и y = g (x), заданных на промежутке [- 10; 2]. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство f (x) ≤ g(x).	«Чтение» графика	+	
	Числовые промежутки, их обозначения	+	
А9. Решите неравенство $\dfrac{(x+10)(x-10)}{10x-30} > 0$	Метод интервалов	+	+
	Область существования дроби	+	
	Числовые промежутки, их обозначения	+	
А10. Решите уравнение $\cos\dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{2}$.	Решение простейших тригонометрических уравнений		+
	Деление обыкновенных дробей	+	
В1. Решите уравнение $x * 5^{2x} - 25 * 5^{2x} = 0$.	Вынесение общего множителя за скобку	+	
	Решение уравнения вида: произведение двух множителей равно 0	+	
	Решение простейшего показательного уравнения		+
	Решение линейного уравнения	+	+
В2. Решите уравнение $\log_7(8x - 20) - \log_7 4 = \log_7 12$.	Свойства логарифма		+
	Свойства логарифмической функции		+
	Решение логарифмического уравнения		+
	Решение линейного уравнения	+	

В3. Найдите значение выражения $-2{,}5\cos x, если \sin x = -\frac{24}{25}; \frac{3\hbar}{2} < x < 2\hbar.$	Основное тригонометрическое тождество	+	+
	Действия с рациональными числами	+	
	Умножение чисел с разными знаками	+	

Данные таблицы констатируют следующий факт: 57% проверяемых ЕГЭ элементов содержания базового уровня – это умения и навыки, сформированные в основной школе, и лишь около одной второй (43%) – в средней (полной) школе. Представленные выше результаты диктуют необходимость выделения учителем как в период всего учебного процесса, так и во время проведения итогового повторения курса математики, учебного времени на актуализацию умений, формируемых в 5-9 классах, в частности проводить преобразование выражений, содержащих обыкновенные и десятичные дроби, положительные и отрицательные числа, решать линейные, квадратные уравнения и неравенства, владеть «терминологией» и обозначением числовых промежутков.

Таким образом, представленный выше анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ части 1, позволяет зафиксировать допустимый уровень базовой подготовки по курсу алгебры и начал анализа.

Анализ выполнения заданий части 2.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности в части 2:

- Умение решать системы уравнений, содержащих одно иррациональное и одно линейное или два логарифмических уравнения.
- Умение применять геометрический смысл производной.
- Умение выполнять тождественные преобразования выражений комбинированного типа и находить их значения.
- Умение выполнять преобразования тригонометрических выражений.
- Умение использовать несколько приёмов при решении комбинированного уравнения.
- Умение использовать свойство периодичности функции для нахождения значений выражений.
- Умение решать текстовую задачу, составляя математическую модель предложенной в ней ситуации.
- Умение решать стереометрические задачи.
- Умение решать планиметрические задачи.
- Умение определять свойства сложной функции.

Основные направления анализа результатов выполнения заданий ЕГЭ части 2:

1) Качество знаний обучающихся 2007 года по разделам курса математики 7-11 классов повышенного уровня, где требуется применения обучающимися знаний в изменённой ситуации, составляет 23,6%.

Качество знаний выполнения заданий по математике повышенного уровня выпускниками Мурманской области в 2004-2007 гг.

Таблица 11

Год	2004	2005	2006	2007
Качество знаний	20,7%	21,6%	19,5%	23,6%

Данные таблицы 11 позволяют сделать следующий вывод: за последние четыре года эксперимента наметилась незначительная тенденция повышения результатов выполнения заданий В4-В11, С1-С2.

2) Процент выполнения заданий повышенного уровня сложности В4–В10, в соответствии с экспертной оценкой нормативных документов по ЕГЭ, должен быть заключён в пределах 15-50%, а с решением задач С1 и С2 должны справиться 5-10% выпускников. В Мурманской области первый показатель составил 8-44%, что примерно соответствует верхней планке прогнозируемых результатов, но на 7% меньше по сравнению с нижней, а второй - значительно выше (в среднем на 11%).

Результаты решения текстовой и геометрических задач, а также исследование функции с помощью производной (по графику производной функции), представлены ниже в таблицах 12-14.

Результаты решения в Мурманской области в 2004-2007 гг.:

текстовых задач

Таблица 12

Год	Текстовые задачи
2004	11%
2005	15%
2006	10%
2007	12%

геометрических задач

Таблица 13

Год	Планиметрия (Часть 2)	Стереометрия	
		Часть 2	Часть 3
2004	7%	9%	2%
2005	6%	10%	3%
2006	7%	7%	1%
2007	9%	8%	2%

исследования функции с помощью графика производной функции

Таблица 14

Год	В5
2004	27%
2005	37%
2006	34%
2007	32%

Наиболее сложными из предложенных алгебраических заданий оказались задания на нахождение значения тригонометрического выражения и выражения смешанного типа (предполагалось использование формул двойного аргумента, формул приведения, раскрытие модуля), в среднем с ним справилось около 26% обучающихся.

Серьёзные трудности по курсу «Алгебра и начала анализа» обнаружены также при выполнении заданий В5 (требовалось использовать геометрический смысл производной) и В8 (планировалось применить определение и свойство периодичности функции для нахождения значения выражения). 32% выпускников указали правильный ответ при решении этих заданий.

Низкие результаты наблюдаются и при решении текстовых задач по курсу «Алгебра», причём эти показатели колеблются от 10 до 15% за последние четыре года проведения ЕГЭ (особые затруднения, как и в предыдущие годы, вызывают задачи на проценты, при этом выбор арифметического метода решения предпочтительнее метода составления уравнения); и по курсу «Геометрия»: рост показателей незначителен как при решении стереометрической, так и планиметрической задач – соответственно 1-2%, и составляет 8-9%). Одна из причин – выполнение заданий В9-В11 не учитывается при выставлении школьной экзаменационной отметки, так как проверяемый ими материал не относится к курсу алгебры и начал анализа.

4) Поэлементный анализ заданий части 2 ЕГЭ-2007 по математике:

Таблица 15

<table>
<tr><th rowspan="2">Задание</th><th rowspan="2">Элементы содержания</th><th colspan="2">Ступень, на которой формируются данные умения и навыки</th></tr>
<tr><th>Основная школа</th><th>Средняя школа</th></tr>
<tr><td rowspan="6">В4. Найдите значение выражения $x+y$, если (x; y) – решение системы $\begin{cases} 2x-\sqrt{10x-y}=6 \\ 12x-y=8 \end{cases}$</td><td>Решение системы с двумя переменными, содержащей иррациональное и линейное уравнения</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>Решение линейного уравнения.</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>Решение иррационального уравнения</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>Формула сокращённого умножения</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>Решение квадратного уравнения</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>Отбор корней</td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table>

B5. Функция y = f(x) определена на промежутке (-5; 5). На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели касательные ко всем точкам, абсциссы которых – **целые числа**. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.	Геометрический смысл производной		+
B6. Найдите значение выражения. $\dfrac{2\cos^2 59^\circ - 1}{8ctg14^\circ \cdot \sin^2 194^\circ}$	Формулы двойного аргумента		+
	Формулы приведения		+
	Основные тригонометрические тождества	+	+
B7. Решите уравнение $2 - 3^{5x-2} = (10 - 3^{5x})^{0,5}$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответа запишите сумму всех его корней).	Решение уравнения комбинированного типа: использование нескольких приёмов		+
	Множество значений функций	+	+
	Решение иррационального уравнения		+
	Решение квадратного уравнения	+	
	Отбор корней	+	+
B8. Функция y=f(x) определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при -1 ≤ x ≤ 2. Найдите значение выражения $\dfrac{f(x) \cdot f(-4)}{f(13)}$	Определение периодической функции		+
	Свойство периодической функции		+
	Арифметические действия с рациональными числами	+	
B9*. Магазин выставил на продажу товар с некоторой наценкой, составляющей несколько процентов от закупочной цены. После продажи 0, 8 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. В результате прибыль магазина составила 15% от закупочной цены. Сколько процентов от закупочной цены составляла первоначальная наценка магазина?	Решение текстовой задачи на %	+	
	Действия с рациональными числами	+	
B10*. Угол между образующими CA и CB конуса равен 90º, высота конуса равна 5, а образующая равна $\dfrac{50}{\sqrt{42}}$. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости ABC.	Аксиомы стереометрии		+
	Понятие угла между прямыми, прямой и плоскостью		+
	Свойства конуса		+
	Теорема о трёх перпендикулярах		+
	Свойства равнобедренного треугольника	+	
	Теорема Пифагора	+	

	Арифметические действия с действительными числами	+	
B11*. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $4\sqrt{5}$, а средняя линия равна 4.	Площадь трапеции	+	
	Свойства и решение прямоугольного треугольника	+	
	Средняя линия трапеции	+	
	Свойства равнобедренной трапеции	+	
	Арифметические действия с действительными числами	+	
C1. Найдите точки минимума функции $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 - \frac{16-8x^2+x^4}{x^2-4}$	Область определения функции	+	
	Исследование функции с помощью производной		+
C2. Решите уравнение $\log_{\sin x}(2\sin 2x + 4\sin^2 x + 1) = 0$	Решение логарифмического уравнения		+
	Область определения логарифмической функции		+
	Отбор корней	+	+
	Решение тригонометрических уравнений		+
	Формула sin двойного аргумента		+
	Вынесение за скобки общего множителя	+	

Приведённый выше поэлементный анализ содержания заданий повышенного уровня позволяет сделать вывод: задачи части 2 в большей степени (около 65%) проверяют овладение обучающимися умениями и навыками, сформированными на старшей ступени обучения, и 35% - в основной школе. Допущенные вычислительные ошибки, незнание планиметрических и алгебраических фактов снизили уровень результативности выполнения заданий В4-В11, С1-С2.

Задания С1 и С2 относятся к заданиям повышенного уровня. При их решении обучающиеся должны были продемонстрировать стандартные алгоритмы решения.

В КИМ-2007 задание С1 на нахождение точек максимума или точек минимума функции представлено задачами двух видов (ниже приведены их возможные варианты решения):

1) Найдите точки максимума функции

$$f(x)=4,5x^2+4x^3-\frac{15-15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^4.$$

Ответ:

$-0,3$.

Решение:

1) Область определения функции – все действительные числа x, в которых $\cos(\pi x)\neq 0$, т.е. $x\neq 0,5+n, n\in Z$.

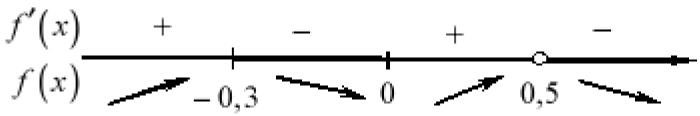
Если $x\neq 0,5+n, n\in Z$, то

$$4,5x^2+4x^3-\frac{15-15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^4=4,5x^2+4x^3-15x^4.$$

2) Найдем точки максимума функции $f(x)=-15x^4+4x^3+4,5x^2$, $x\neq 0,5+n, n\in Z$.

$f'(x)=-60x^3+12x^2+9x$, $f'(x)=-3x\left(20x^2-4x-3\right)$.

$f'(x)=0$ при $x=0$, $x=-0,3$ ($x=0,5$ не входит в область определения функции).



Точка максимума $x=-0,3$.

Ответ: – 0,3.

2) Найдите точки минимума функции

$$f(x)=3x^2\cdot\frac{81-18x^2+x^4}{x^2-9}-2x^3-18x^2.$$

Ответ:

$-2,5$.

Решение:

1) Область определения функции – все действительные числа x, кроме $x=\pm 3$.

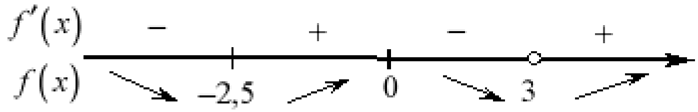
Если $x\neq\pm 3$, то

$$3x^2\cdot\frac{81-18x^2+x^4}{x^2-9}-2x^3-18x^2=3x^2\cdot\left(x^2-9\right)-2x^3-18x^2=3x^4-2x^3-45x^2.$$

2) Найдем точки минимума функции $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 45x^2$, $x \neq \pm 3$.

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 90x$, $f'(x) = 6x\left(2x^2 - x - 15\right)$.

$f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = -2{,}5$ ($x = 3$ не входит в область определения функции).



Точка минимума $x = -2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

Алгоритм выше предложенных решений включал следующие шаги:
1. Нахождение области определения функции;
2. Упрощение формулы, задающей функцию;
3. Исследование функции с помощью производной;
4. Нахождение точки максимума или точки минимума функции.

Основные ошибки, допущенные обучающимися при решении задания С1:
- в упрощении формулы, задающей функцию, без нахождения области определения функции, и как следствие, появление в ответе точек, которые не входят в область определения функции;
- в нахождении области определения функции, упрощении формулы, исследовании функции с помощью производной, внесение посторонней точки, не входящей в область определения функции, в ответ;
- в записи ответа не точки экстремума, а значений в ней, т.е. экстремума функции;
- при решении неравенств $\cos x > 0$ и $\sin x > 0$.

Наличие таких ошибок свидетельствует о формальном усвоении обучающимися основных алгоритмов решения, недостаточной отработке определений базовых понятий, а также неумении рефлексировать свою деятельность. В частности, отдельные выпускники продемонстрировали незнание определений критической точки, а именно «…это внутренняя точка области определения…», точки экстремума и экстремума функции. Ошибок, связанных с применением формул сокращённого умножения, с нахождением производной, вычислительных ошибок в задании С1, обучающимися допущено незначительно.

Приведенные далее критерии оценки выполнения алгебраических заданий С1 и С2 отличаются от критериев оценки заданий высокого уровня сложности. Так, от обучающихся не требовалось обосновывать приведенное ими решение. Это объясняется тем, что задачи С1 и С2 не являются совершенно новыми для обучающихся, как это характерно для более сложных заданий С3–С5. При решении задач С1 и С2 нужно, например, выделить несколько случаев, подлежащих рассмотрению, или выбрать правильный порядок соответствующих преобразований и вычислений. При этом в каждом из этих случаев надо применить стандартный способ решения, процедура которого достаточно отработана и не нуждается в приведении обоснований. Поэтому конкретизированные критерии оценки выполнения этих заданий фиксируют только правильность выделенных шагов решения, но не включают требования к их обоснованию. В связи с этим в зависимости от полноты и правильности приведенного решения, за выполнение заданий С1 и С2 выставляется от 0 до 2 баллов. Отметим, что критерии оценки выполнения заданий повышенного уровня С1 и С2, включенных в КИМ-2007, достаточно «жесткие». Фактически баллы начисляются в том случае, когда ученик явно демонстрирует владение выбранным им методом решения. Например, правильно проводит требуемые операции, исследует все требуемые случаи, выполняет отбор соответствующих решений согласно условию задания. При этом ему дается право только на описку и/или вычислительную ошибку.

Максимальные два балла за задание С1 были присвоены, если приведена верная последовательность шагов:

- найдена D(f) и упрощена формула, задающая функцию;
- функция исследована с помощью производной и найдена точка экстремума.

Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.

Одним баллом оценено задание в случае верно приведённой последовательности всех шагов решения, но допущена описка и (или) вычислительная ошибка в шаге 2) . не влияющая на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.

77% обучающихся не справились (или не приступили) с заданием С1, что на 1% больше, чем в 2006 г.

Алгебраическое задание С2 так же, как и С1, было сформулировано достаточно стандартно «Решить уравнение». Предложены два вида уравнений комбинированного типа (ниже приведены их возможные варианты решения):

1).

$$6-5x+x^2=4(x-2)\sqrt{x}.$$

Ответ:

$2;\ 11+4\sqrt{7}.$

Решение:

1) $6-5x+x^2=4(x-2)\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)-4(x-2)\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x-4\sqrt{x}-3\right)=0.$

2) $(x-2)\left(x-4\sqrt{x}-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(x=2 \text{ или } x-4\sqrt{x}-3=0\right).$

$x-4\sqrt{x}-3=0.$

Пусть $y=\sqrt{x}$, $y\ge 0$, тогда $y^2-4y-3=0$.

$y^2-4y-3=0 \Leftrightarrow (y=2+\sqrt{7}$ или $y=2-\sqrt{7})$.

$y=2+\sqrt{7}$, тогда $\sqrt{x}=2+\sqrt{7}$ и $x=11+4\sqrt{7}$.

$y=2-\sqrt{7}$ не удовлетворяет условию $y\ge 0$.

Ответ: $2;\ 11+4\sqrt{7}.$

2)

$$\log_{\sin x}\left(\sin 2x+2\sin^2 x+1\right)=0.$$

Ответ:

$\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

Решение:

$$1)\log_{\sin x}\left(\sin 2x+2\sin^2 x+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x+2\sin^2 x+1=1\\ \sin x>0\\ \sin x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x+2\sin^2 x=0\\ \sin x>0\\ \sin x\ne 1\end{cases}.$$

$$2)\begin{cases}\sin 2x+2\sin^2 x=0\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x(\sin x+\cos x)=0\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=0 \text{ } или \text{ } \operatorname{tg} x=-1\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg} x=-1\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\\ \sin x>0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Первое уравнение сводилось к уравнению, когда произведение двух множителей равно 0. Наибольшие затруднения вызвало у выпускников решение уравнения второго вида, степень сложности которого намного выше предыдущего. Для его решения обучающиеся должны заменить уравнение равносильной ему системой. Возможен и другой вариант его решения: указать ОДЗ, а затем, решив тригонометрическое уравнение, сделать выборку решений, входящих в ОДЗ.

Основные ошибки, допущенные обучающимися при решении задания С2:

по 1 виду уравнений:

- потеря корней, а именно, разложив одну часть уравнения на множители
- (х-2)(х-4$\sqrt{x}$-3)=0, делили обе части на (х-2);
- внесение постороннего корня в ответ, а именно, после введения подстановки
- $\sqrt{x}$=у и решения квадратного уравнения, приравнивали оба его корня к $\sqrt{x}$ и решали полученные простейшие иррациональные уравнения;

по 2 виду уравнений:

- нахождение ОДЗ не в полном объёме (часто не учитывался факт cos x> 0 и, как следствие, включение в ответ посторонних корней;
- отсутствие полного исследования ОДЗ или включение только факта положительности выражения, стоящего под знаком логарифма;
- неумение выбрать решения, соответствующие ОДЗ уравнения;
- ошибки в решении тригонометрических уравнений либо незнание способа его решения.

Как и в задании С1, многие обучающиеся показали формальное усвоение определения логарифма.

За приведённую ниже верную последовательность всех преобразований и вычислений в соответствии с критериями оценки выполнения задания С2 выставлялось 2 балла: - за 1 уравнение: 1) данное уравнение сведено к уравнению, левая часть которого представляет собой произведение двух множителей, а правая равна 0; 2) решено полученное уравнение; - за 2 уравнение: 1) логарифмическое уравнение заменено равносильной ему системой, содержащей тригонометрическое уравнение и ограничение на основание логарифма;

2) решена составленная система.

В случае верно приведённой последовательности всех шагов решения, но допущенной описки и (или) вычислительной ошибки в шаге 2), не влияющей на дальнейший ход решения (в результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ) за решение задания С2 ученик получал 1 балл. Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления 1 или 2 баллов, оценены в 0 баллов – таких работ в 2007 году было на 4% меньше (86%) по сравнению с предыдущим годом.

В таблице представлены результаты выполнения заданий С1 и С2 за последние три года. Наблюдается положительная динамика результативности решения заданий С1 (рост на 9%), а средний показатель качества – 20%. С заданием С2 в среднем справляются 18% обучающихся. Эти данные позволяют сделать следующие выводы: обучающиеся 11-х классов удовлетворительно овладели методами решения алгебраических задач комбинированного типа и достаточно формально усваивают основные математические определения, алгоритмы.

Результаты выполнения алгебраических заданий повышенного уровня сложности С1 и С2 в Мурманской области в 2004-2007 гг.

Таблица 16

Год	С1	С2
2005	14%	22%
2006	24%	14%
2007	23%	18%

Анализ выполнения заданий части 3.

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности в части 3:

- Умение решать задачи с параметром.
- Умение решать стереометрическую задачу на комбинацию геометрических тел.
- Умение решать и проводить исследования решения системы, содержащей уравнения разного вида.

Планируемая планка результативности выполнения заданий части 3 в соответствии с экспертной оценкой, представленной в нормативных документах по ЕГЭ, выглядит следующим образом: С3 (5-8%), С4 (3-6%), С5 (0,1-1%). Распределение статистической трудности заданий высокого уровня сложности ЕГЭ по математике по Мурманской области в 2007 году в основном соответствует этим показателям: С3 – 6%, С4 – 2%, С5 – 1%.

Для нахождения значения параметра в задании С3 были предложены выражения двух видов: 1) показательные; 2) логарифмические (ниже приведен вариант возможного решения первого вида).

Задание. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ значение выражения $8^{2x}-6$ не равно значению выражения $(2-a)8^x$.

Ответ:

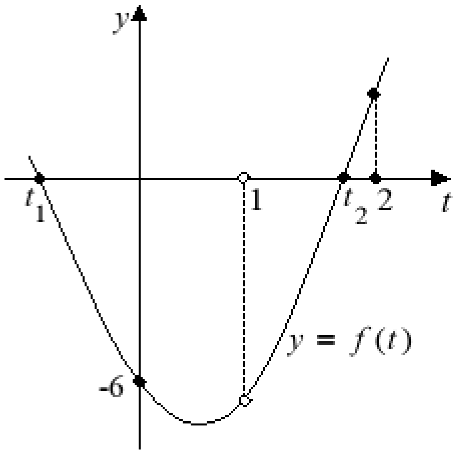
$a<3$, $a\geq 7$.

Решение:

1) Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие

$8^{2x}-6\neq(2-a)\cdot 8^x \Leftrightarrow f(t)\neq 0$, где $t=8^x$ и $f(t)=t^2-(2-a)t-6$.

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение $f(t)=0$ не имело корней на промежутке $\left(8^0;8^{1/3}\right]=(1;2]$.



2) График функции $y=f(t)$ (относительно переменной $t\in\mathbb{R}$) есть парабола, изображенная на рисунке: ее ветви направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс (так как $f(0)=-6$). Поэтому квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня $t_1<0$ и $t_2>0$. Если $0<t<t_2$, то $f(t)<0$, а если $t>t_2$, то $f(t)>0$, поэтому уравнение $f(t)=0$ имеет корень на промеж

$(1;2]$ тогда и только тогда, когда $1<t_2\leq 2\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)<0\\ f(2)\geq 0\end{cases}$.

3) Решим полученную систему: $\begin{cases}1^2-(2-a)-6<0\\ 2^2-2(2-a)-6\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 3\leq a<7$.

Итак, уравнение $f(t)=0$ не имеет корней на промежутке $(1;2]$ для всех остальных значений a, т. е. тогда и только тогда, когда $a<3$ или $a\geq 7$.

Ответ: $a<3$, $a\geq 7$.

В соответствии с критериями оценки выполнения задания С3 были выставлены следующие баллы:

4 – Приведена верная последовательность всех шагов решения:

1. задача сведена к исследованию корней квадратного уравнения f(t)=0 на соответствующем промежутке;
2. показано (возможно, только с помощью рисунка), что квадратный трёхчлен f(t) имеет два корня разного знака, и получены два условия на параметр a, система которых необходима и достаточна для того, чтобы квадратное уравнение f(t)=0 имело корень на соответствующем промежутке;
3. полученные неравенства решены и найдены оба множества, составляющие искомое множество значений параметра a; а также все преобразования, вычисления верны и получен верный ответ.

3 - Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допускается, что не показано (ни словесно, ни с помощью рисунка), что квадратный трёхчлен f(t) имеет два корня разного знака. В шаге 2), возможно содержатся неточности, состоящие в том, что строгие (нестрогие) неравенства заменены нестрогими (строгими). Ответ получен и либо верен, либо отличается от верного из-за допущенных в шаге 2) неточностей.

2 - Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 2) получена система неравенств, которая необходима и достаточна для того, чтобы квадратное уравнение f(t)=0 имело корень на соответствующем промежутке. Возможно, что при этом допущены неточности, состоящие в том, что строгие (нестрогие) неравенства заменены нестрогими (строгими). В шаге 3) найдено (возможно, неверно из-за допущенных в шаге 2) неточностей):

- либо множество значений параметра а, при котором квадратное уравнение f(t)=0 имеет корень на соответствующем промежутке;
- либо хотя бы одно из двух множеств, составляющих искомое множество значений параметра а.

1 – Приведены шаги 1) и 2) решения, а шаг 3) отсутствует, содержит ошибки или не доведён до конца. В шаге 2) получено хотя бы одно из неравенств на параметр а, необходимое для того, чтобы квадратное уравнение f(t)=0 имело корень на соответствующем промежутке, при этом в нём, возможно, строгое (нестрогое) неравенства заменены нестрогим (строгим).

0 – Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

Предметная ГЭК выделяет пять основных методов, используемых обучающимися при решении задания С3 (эти методы изложены ниже на примере решения задания С3 варианта №78):

Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $x \in (3; 9]$ значение выражения $\log_3^2 x - 9$ не равно значению выражения $(a-4)\log_3 x$.

Обозначим

$f(a) = \log_3^2 x + (4-a)\log_3 x - 9$, $g(x) = \log_3^2 x + (4-a)\log_3 x - 9$, $\log_3 x = t$.

Метод **1.** Рассматривается линейная относительно параметра a функция $f(a)$. Показывается, что при $x \in (3; 9]$, $f(a) \in (g(3); g(9)]$. Поэтому $f(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a \in (\alpha; \beta]$, где α, β – корни линейных относительно a уравнений $g(3) = 0$, $g(9) = 0$, т.е. $\alpha = -4$, $\beta = 3/2$. Делается вывод: $a \in (-\infty; -4] \cup (3/2; +\infty)$.

Метод **2.** Отмечается, что $t \in (1; 2]$ при $x \in (3; 9]$. Рассматривается квадратное уравнение $t^2 + (4-a)t - 9 = 0$. Показывается, что дискриминант Δ этого уравнения всегда положителен и, поэтому, при любых a оно имеет ровно два решения $t_1 = \frac{1}{2}(a - 4 - \sqrt{\Delta})$ и $t_2 = \frac{1}{2}(a - 4 + \sqrt{\Delta})$.

Рассматриваются всевозможные случаи расположения t_1 и t_2 относительно отрезка $(1; 2]$, при которых уравнение $t^2 + (4-a)t - 9 = 0$ будет иметь (не будет иметь) решение:

$0 < t_2 \le 1$ или $0 < t_1 \le 1$ ($t_2 \le 1$ или $t_1 \le 1,\ t_2 > 2$ или $t_1 > 2$).

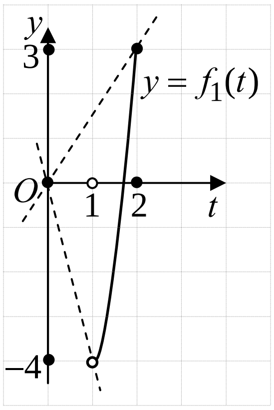
В результате решения соответствующих иррациональных неравенств, получается верный ответ.

Метод 3. Отмечается, что $t \in (1; 2]$ при $x \in (3; 9]$. Рассматривается квадратное уравнение $t^2 + (4-a)t - 9 = 0$ и функция $g(t) = t^2 + (4-a)t - 9$. Показывается, что дискриминант этого уравнения всегда положителен и, поэтому, при любых a оно имеет ровно два решения t_1 и t_2. С учетом того, что ветви параболы $y = g(t)$ направлены вверх, эти решения не будут принадлежать промежутку $(1; 2]$, если

$g(1) \ge 0,\ g(2) > 0$ или $g(1) \le 0,\ g(2) < 0$

(случай или $g(1) > 0,\ g(2) > 0$ можно не рассматривать). В результате решения этих линейных относительно a неравенств легко получается верный ответ.

***Метод* 4.** Отмечается, что $t \in (1;\, 2]$ при $x \in (3;\, 9]$. Рассматривается квадратное уравнение $t^2 + (4 - a)t - 9 = 0 \iff t^2 + 4t - 9 = at$. Вводятся в рассмотрение функции $f_1(t) = t^2 + 4t - 9$, $f_2(t) = at$. Исходя из условия, необходимо найти такие значения параметра a, при которых графики этих функций не имеют общих точек при $t \in (1;\, 2]$. Изображается график функции $y = f_1(t)$, $t \in (1;\, 2]$. Графиком функции $y = f_2(t)$ является прямая, проходящая через начало координат. Параметр a является угловым коэффициентом этой прямой. Поэтому графики функций $y = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ не будут пересекаться при $t \in (1;\, 2]$, если $a \in (-\infty;\, -4] \cup (3/2;\, +\infty)$.



***Метод* 5.** Отмечается, что $t \in (1;\, 2]$ при $x \in (3;\, 9]$. Рассматривается квадратное уравнение $t^2 + (4 - a)t - 9 = 0$ из которого $a = t + 4 - 9/t$. Уравнение $t^2 + (4 - a)t - 9 = 0$ не будет иметь решений, если a не принадлежит множеству значений функции $g(t) = t + 4 - 9/t$ на промежутке $(1;\, 2]$.

Функция g монотонна (возрастает) и непрерывна на промежутке $(1;\, 2]$. Поэтому множеством ее значений является промежуток $(g(1);\, g(2)] = (-4;\, 3/2]$. Следовательно, $a \in (-\infty;\, -4] \cup (3/2;\, +\infty)$.

Основные ошибки и недочеты, допущенные обучающимися в решениях задания С3:

- решение уравнений $g(3) = 0$, $g(9) = 0$ относительно a и без каких-либо обоснований запись верного ответа $a \in (-\infty;\, -4] \cup (3/2;\, +\infty)$;
- отсутствие ссылок на монотонность функций, множество значений которых находится путем подстановки концов некоторого промежутка;
- запись в ответ множества значений параметра a, при котором выражения равны, а не наоборот;
- замена строгих неравенств на нестрогие и наоборот.

С заданием С3 успешно справилось в 2007 году 6% обучающихся. Этот показатель по сравнению с 2005 годом на 5% ниже.

В 2007 году для заданий С4 впервые были выбраны конфигурации в виде комбинаций многогранников, которые условно можно назвать заданиями о пирамидах, «вписанных» в призму или пирамиду. Задания такого вида зачастую незаслуженно забывают, отдавая предпочтение комбинации многогранника и вписанной (или описанной) сферы. Отметим, что решение задач, связанных с комбинациями только многогранников, требовало от обучающихся умений строить в многогранниках сечения плоскостями.

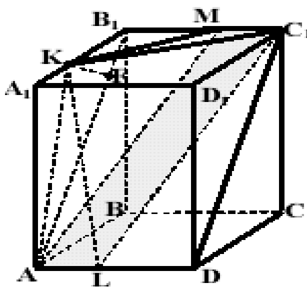
Задание проверяло умение обоснованно строить сечение многогранника, знание подходов к вычислению основных характеристик пирамиды, вычислительные (алгебраические и арифметические) навыки.

Задания С4 2007 года можно разделить на несколько групп (типов) по виду рассматриваемых в них комбинаций многогранников (ниже приведены примеры задач этих типов с возможными вариантами их решения и критериями оценивания).

Рассмотрим задачи на комбинацию прямоугольного параллелепипеда и пирамиды.

Задача 1 типа.

Стороны AB и BC основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 2 и 3 соответственно, боковое ребро $AA_1 = 10$. Точки L, K, M лежат на ребрах AD, A_1B_1, B_1C_1 так, что $AL : AD = 1 : 3$, $A_1K : A_1B_1 = 2 : 5$, $B_1M : B_1C_1 = 2 : 3$. Найдите объем пирамиды $KAMC_1L$.



Комментарий.

В серии задач данного типа рассматривается комбинация прямоугольного параллелепипеда и четырёхугольной пирамиды, расположенной в параллелепипеде определённым образом. При анализе взаимного расположения фигур для вычисления необходимых величин важно установить:

1) вид основания пирамиды;

2) расположение её вершины и основания высоты.

Так рассматривая величины отношений AL: AD= 1: 3 и $B_1M : B_1C_1 = 2 : 3$, необходимо заметить, что точки L и M равноудалены от вершин A и C_1 данного параллелепипеда и поэтому основанием пирамиды является параллелограмм AMC_1L.

Если рисунок к задаче выполнен удовлетворительно, то несложно заметить, что высотой данного параллелограмма является диагональ боковой грани параллелепипеда, а вычисление высоты тривиально и основано на теореме Пифагора.

Теперь для получения искомого объёма пирамиды следует увидеть, как расположена высота пирамиды, точнее, где лежит основание этой высоты. Это чуть сложнее. Но при удовлетворительном рисунке и представлении о взаимном расположении граней диагональных сечений параллелепипеда несложно увидеть, что основанием высоты является основание перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на диагональ боковой грани параллелепипеда. Это объясняется, например, взаимной перпендикулярностью боковой грани и диагонального сечения параллелепипеда.

Вычисление длины найденной высоты сводится к решению стандартной задачи, требующей применения свойств подобных прямоугольных треугольников.

Поэтому ключевыми моментами, которые подлежат обоснованию и на которые следует опираться при решении задачи, являются именно те факты, которые приведены выше:

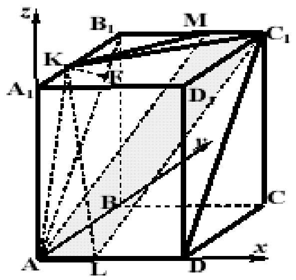
а) диагональ боковой грани – высота параллелограмма, лежащего в основании пирамиды;

б) высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на диагональ ее боковой грани.

Практически во всех задачах «на прямоугольный параллелепипед» в КИМ-2007 наряду с предложенным выше подходом может быть использован векторно-координатный способ решения. Например, за начало отсчета можно выбрать вершину A, а координатные оси направить по ребрам параллелепипеда. Тогда координаты всех вершин пирамиды $KAMC_1L$ подсчитываются без особых затруднений, и тот факт, что основание AMC_1L является параллелограммом, можно проверить, например, вычисляя длины его сторон. Конечно, это не слишком рациональный способ рассуждения, но он, вне всяких сомнений, допустим. Площадь этого параллелограмма можно подсчитать, зная координаты векторов AL и AM. Аналогичным образом можно подсчитать координаты точки F и после этого проверить перпендикулярность KF и AM, КF и AL, вычисляя скалярные произведения векторов. При таком подходе несколько изменятся ключевые моменты: в обосновании а) вместо нахождения высоты параллелограмма потребуется та или иная ссылка на способ вычисления его площади, в обосновании б) по-прежнему следует найти высоту пирамиды, только теперь не геометрическим, а алгебраическим способом.

В работах выпускников классов с углубленным изучением математики встречались и другие подходы, связанные с использованием векторного произведения. Подчеркнем, что отсутствие векторного произведения в ныне действующем стандарте математического образования ни в коем случае не может служить поводом для того, чтобы вообще не рассматривать такие решения или же по умолчанию считать их неверными. Ведь в учебниках по стереометрии для классов с углубленным изучением математики свойства векторного произведения изучаются и используются при решении задач. Приведем возможную запись векторно-координатного способа решения.

1. Пусть начало прямоугольной декартовой системы координат xyz совпадает с точкой A, а оси координат направлены по ребрам данного прямоугольного параллелепипеда. Тогда из условия задачи получим $A(0;0;0), L(1;0;0)$, $M(2;2;10)$, $C_1(3;2;10)$, $K(0;0,8;10)$. Отсюда $\overrightarrow{AL}(1;0;0)$, $\overrightarrow{MC_1}(1;0;0)$. Значит, $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{MC_1}$ и поэтому основание AMC_1L пирамиды $KAMC_1L$ – параллелограмм.



2. Используя свойства векторного произведения, площадь $S_о$ параллелограмма AMC_1L можно найти по формуле $S_о=\left|\left[\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM}\right]\right|$.
3. $\overrightarrow{AM}(2;2;10), \left[\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 10\end{pmatrix}=-10\vec{j}+2\vec{k}$,

   $\left|\left[\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM}\right]\right|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$, $S_о=2\sqrt{26}$.
4. Из определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{n}=-10\vec{j}+2\vec{k}$ перпендикулярен плоскости AML. Поэтому уравнение плоскости AML имеет вид $-10y+2z=0 \Leftrightarrow 5y-z=0$. Высоту h пирамиды $KAMC_1L$ найдем по формуле расстояния от точки K до плоскости AML. Получаем $h=\dfrac{|5\cdot 0,8-10|}{\sqrt{26}}=\dfrac{6}{\sqrt{26}}$. Объем V пирамиды $KAMC_1L$ вычисляем по формуле $V=\dfrac{1}{3}h\cdot S_{AMC_1L}=4$.

Отметим, что при оценивании такого решения не снижалась оценка при отсутствии ссылок на свойства векторного произведения, следующие из его определения. Кроме того очевидно, что выпускник, предъявляющий такое решение, все промежуточные действия, скорее всего, способен выполнить устно. Такое решение должно быть оценено в 4 балла.

Оценку 3 балла можно выставить при полном отсутствии слов и, следовательно, явных (словесных) обоснований.

1) В системе координат xyz: $A(0;0;0)$; $L(1;0;0)$, $M(2;2;10)$, $C_1(3;2;10)$, $K(0;\ 0,8;\ 10)$; $\overrightarrow{AL}(1;0;0)$; $\overrightarrow{MC_1}(1;0;0)$; $\overrightarrow{AM}(2;2;10)$.

2) $S_{AMC_1L}=\left|\left[\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM}\right]\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 10\end{pmatrix}\right|=\left|-10\vec{j}+2\vec{k}\right|=2\sqrt{26}$,

3) $AML: -10y+2z=0 \Leftrightarrow h=\dfrac{|5\cdot 0,8-1\cdot 10|}{\sqrt{26}}=\dfrac{6}{\sqrt{26}} \Rightarrow V=\dfrac{1}{3}h\cdot S_{AMC_1L}=4$.

Отметим, что при выставлении 3 баллов допустима описка или вычислительная ошибка, не влияющие на общий ход решения задачи. Утверждения, которые согласно общим критериям оценивания геометрических задач следует привести при выставлении 3 баллов, в данной записи «скрыты» в формулах. Например, в пункте 2) указана формула для вычисления площади основания пирамиды, которую можно использовать только в том случае, если основанием пирамиды является параллелограмм. Или второй пример: вычисление высоты пирамиды как расстояния от точки до плоскости выполнено с фактической подстановкой координат точки K в соответствующую формулу, поэтому в этой формуле скрыто утверждение о длине высоты как расстоянии от точки до плоскости, то есть о длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость основания.

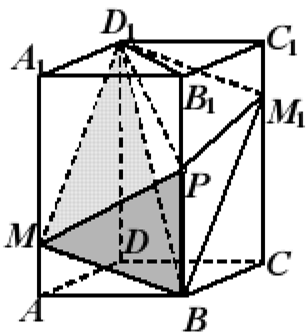
В том случае, когда при решении задачи таким способом найдены координаты вершин пирамиды, установлено, что основанием пирамиды является параллелограмм, найдена его площадь, а также получено уравнение плоскости AML, то этого достаточно для выставления 2 баллов, если даже при этом объем пирамиды не найден или найден неверно.

Если же установлено, что основанием пирамиды является параллелограмм, то можно выставить 1 балл.

Кроме трех перечисленных подходов к решению, возможны (и допустимы) их варианты и комбинации. Некоторые обучающиеся применили формулу вычисления объема треугольной пирамиды сразу по координатам ее вершин (через определитель третьего порядка), вычислив объем пирамиды KAML – удвоили результат. В таком случае ключевым моментом является именно равновеликость пирамид KAML и KMC_1L.

Задача 2 типа.

Ребра AB и AD основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 3 и 7. На боковых ребрах AA_1 и BB_1, равных 12, лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 2:3$; $B_1P : PB = 3:4$. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1.



Комментарий.

В задачах этого типа также рассматривается комбинация прямоугольного параллелепипеда и пирамиды, в основании которой лежит параллелограмм, а вершины пирамиды лежат на рёбрах этого параллелепипеда.

Решение выглядит так. Сначала доказывается, что основанием пирамиды является параллелограмм BMD_1M_1. Диагональная плоскость BB_1DD_1 разбивает пирамиду на две равновеликие треугольные пирамиды. Значит, достаточно вычислить объём $PBMD_1$. Если за основание принять треугольник PMB, а за вершину принять точку D_1, то необходимые для подсчёта высоты просто совпадают с соответствующими измерениями параллелепипеда. Отсюда видно, что ответ на вопрос задачи не зависит от положения точки M на ребре AA_1. Поэтому формально можно считать, что условие задачи содержит так называемые лишние данные. По этому поводу скажем следующее.

Величина отношения $AM : MA_1$ включена в условие задачи сознательно, чтобы конкретизировать геометрическую конфигурацию, сделать задачу более доступной, так как общеизвестно, что введение в условие задачи параметрических данных усложняет и условие, и решение. Предложенная задача абсолютно корректна и имеет единственное решение.

Обучающиеся классов с углублённым изучением математики могут, как и в задачах первого типа, использовать в данном случае векторно-координатный способ решения. Обратим внимание на то, что при решении задачи этим способом без дополнительных указаний сложно догадаться, что искомый объём не зависит от величины отношения $AM : MA_1$.

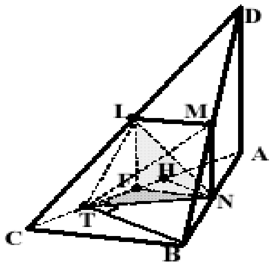
Если при решении задачи векторно-координатным способом найдены координаты вершины пирамиды, установлен вид основания пирамиды, то этого достаточно для выставления 1 балла, если же найдено уравнение плоскости сечения и площадь основания, то 2 – балла.

Оценка 3 балла может быть выставлена, если вычисления лишены каких-либо пояснений и, может быть, имеется описка, не влияющая на дальнейший ход рассуждений. Оценка 4 балла выставляется, если решение доведено до конца, получен верный ответ.

Отметим ещё раз, что запись решения векторно-координатным способом может содержать обоснования в «свёрнутом виде», а именно: в записи используемых формул могут содержаться утверждения, составляющие ключевые моменты решения задачи. Такая свёрнутая «формулировка» утверждений не должна приводить к снижению оценки за решение задачи.

Аналогичные соображения можно высказать и относительно двух других типов задач, которые присутствуют в вариантах КИМ-2007.

Задача третьего типа.



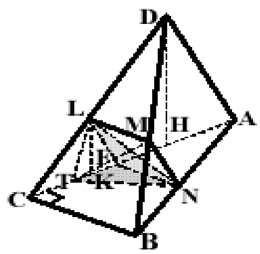
В основании пирамиды DABC лежит треугольник ABC, *в котором* $\angle C = 30^\circ$, $AC = 20$, $BC = \frac{8}{\sqrt{3}}$. *Боковое ребро* AD *равно* $6\sqrt{3}$ *и перпендикулярно плоскости* ABC. *Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BD параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды. Ее вершина T – основание высоты BT треугольника ABC. Найдите объем второй пирамиды.*

Ответ: 12.

Задача четвёртого типа.

В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $AC = 5$, $BC = 12$. Высота пирамиды, опущенная из вершины D, равна 8, а ее основание лежит на отрезке AC. Сечение пирамиды, проходящее через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды с вершиной T. Точка T лежит на отрезке AC, $TC = 2$. Найдите объем второй пирамиды.

Ответ: 4.



Как видно из условия этих задач, они аналогичны задачам первых двух типов. Основанием построенной пирамиды также является параллелограмм, а объём пирамиды может быть найден, если заметить, что она может быть разбита на две равновеликие пирамиды. При этом объём одной из двух равновеликих частей может быть найден очень просто.

Отметим, что эти задачи также допускают векторно-координатный способ решения и поэтому все соображения и метод построения такого решения, проведённый ранее, полностью можно перенести на задания третьего и четвёртого типов.

При решении задачи С4, обучающиеся выбирали различные способы и подходы. В качестве основных можно выделить два:

1. Пошаговое вычисление всех характеристик искомой пирамиды и обоснование расположения и свойств её основания и высоты;
2. Вычисление объёма исходной пирамиды и определение отношения объёмов искомой и данной пирамид.

Основные ошибки, допущенные обучающимися при выполнении задания С4:

- не установлено или неверно найдено положение вершины (или её проекции) искомой пирамиды;
- не найден подход к вычислению высоты искомой пирамиды;
- отсутствие либо неправильное обоснование положения высоты и основания высоты искомой пирамиды;
- ошибки при написании используемых формул;
- вычислительные ошибки и ошибки в алгебраических преобразованиях.

Результаты решения стереометрической задачи в части 3 свидетельствуют, что уровень геометрической подготовки обучающихся остаётся по-прежнему низким. Тем не менее, в 2007 году этот показатель выше на 1% соответствующего показателя в 2006 году и составляет 2% (таблица 23).

Рекомендации учителям математики по подготовке обучающихся к решению задачи С4:

1. Уделить внимание:
   - целенаправленному формированию умений выполнять построения следов и сечений;
   - теоретико-обосновательной стороне решения вычислительных стереометрических задач.
2. Увеличить долю задач на комбинацию нескольких тел и соотношения между характеристиками частей одного тела.
3. Соотношение между долями задач на арифметический и алгебраический методы увеличить в пользу последних.

Если кратко охарактеризовать задания С5 по математике в вариантах КИМ в июне 2007 года, то каждое из них, в принципе, состоит из решения двух кубических уравнений и нахождения количества корней уравнения f(y)=g(y) с разнотипными элементарными функциями f и g. Соответственно, в решении каждой из этих задач выделяются три основных шага: два из них связаны с нахождением корней двух кубических уравнений, и третий состоит в исследовании уравнения f(y)=g(y) функционально-графическим методом.

Верное выполнение одного из двух первых шагов является необходимым, и, как правило, достаточным основанием для выставления 1 балла, а верное выполнение двух первых шагов обеспечивает получение 2 баллов. В соответствии с общими критериями оценка в 3 балла означает, что задача по существу решена, но имеются недочеты в обоснованиях при исследовании уравнения f(y)=g(y) или допущена арифметическая ошибка (описка) в предыдущем шаге, не повлиявшая на ход дальнейшего решения.

Выделим три существенных отличия задания С5 в вариантах 2007 года. Во-первых, это не задача с параметром. Во-вторых, условия большинства заданий начинаются словами «Докажите, что…». Задания такого типа впервые включены в ЕГЭ по математике. Вообще, отсутствие задач на доказательство в прежние годы легко объяснимо внешними технологическими причинами и особенностями проведения ЕГЭ, но вряд ли хорошо соотносится с внутренней структурой и характером математики как учебного предмета. Впрочем, продвижение в «доказательную» сторону в 2007 году носит весьма ограниченный и по существу пробный характер. Это вовсе не задача на доказательство в классическом дедуктивном понимании этого термина. Содержательно меняется только форма предъявления ответа: вместо явной записи всех решений системы уравнений в их числовом представлении требуется дать оценку количества этих решений. В-третьих, решения всех заданий, предложенные разработчиками КИМ, оформлены в виде выполнения трёх основных шагов. Уменьшение числа шагов более жестко и точно структурирует предложенные критерии. Напомним, что в 2002-2006 гг. решения заданий С5, предложенные в рекомендациях для экспертов, в подавляющем числе случаев состояли из пяти шагов.

Наконец отметим, что впервые в задания С5 введена система, причем несимметричная: только одно из двух уравнений зависит от двух переменных. Впрочем, это чисто техническое отличие. Вполне можно предложить формулировки условий вообще без систем уравнений, что, кстати, и сделано примерно в 25% вариантов КИМ-2007.

Основная тонкость заданий С5 состоит в том, что решения двух кубических уравнений, о которых шла речь выше, не являются независимыми. Решить более сложное из них, не решив до этого более простое кубическое уравнение, практически невозможно. Первое уравнение системы всегда имеет вид $Q_3(x)=0$, где в левой части стоит кубический многочлен с целыми коэффициентами. Вид второго уравнения несколько меняется в зависимости от тематической принадлежности задания. Вот основные разновидности вторых уравнений:

$$h(x,y)=\varphi(y)\cdot\sqrt{\frac{P_3(x)}{x}},$$

$$h(x,y)=\varphi(y)\cdot\sqrt{\frac{P_3(x)}{x+1}},\qquad h(x,y)=\varphi(y)\cdot\sqrt{P_3(x)},\qquad h(x,y)=\varphi(y)\cdot\sqrt{\frac{P_3(x)}{x^2}},$$

где $P_3(x)$ - другой кубический многочлен с целыми коэффициентами. При этом в первоначальном условии задания под радикалом стоит выражение, которое еще следует привести к алгебраической дроби одного из указанных типов.

<u>Шаг 1</u> решения как раз и начинается с необходимых тождественных преобразований подкоренного выражения во втором уравнении системы.

Уравнение $P_3(x)=0$ является достаточно простым. Один из его корней легко находится подбором: это всегда или x=±1 , или x=0 . Так как найти подбором корень x=-1 сложнее, чем корень x=1, то корень x=-1 появляется только в случаях, когда в подкоренном выражении стоит не дробно-рациональная функция, а просто многочлен.

После подбора такого простого корня следует произвести разложение $P_3(x)$ на множители и убедиться, что второй множитель всегда является полным квадратом $(ax-b)^2$. Значит, область определения подкоренного выражения – это промежуток и отдельно расположенное число $x=\frac{b}{a}$.

Шаг 2 состоит в основном в проверке того, что «специальный» корень $x=\frac{b}{a}$ уравнения $P_3(x)=0$ из шага 1) является корнем $Q_3(x)=0$ первого уравнения системы. Более того, оказывается, что другие корни первого уравнения (если они есть) не входят в область определения подкоренного выражения второго уравнения системы. Вывод: система может иметь решения, только если $x=\frac{b}{a}$.

Шаг 3 заключается в исследовании уравнения $h(\frac{b}{a},y)=0$, которое получается, если во второе уравнение системы подставить $x=\frac{b}{a}$. Это уравнение сводится к уравнению вида f(y)=g(y), где функция g либо линейная, либо квадратичная, либо дробно-линейная, а функция f либо показательная, либо логарифмическая, либо тригонометрическая, либо степенная (с нецелым показателем степени). Количество корней уравнения f(y)=g(y) находится с помощью использования обычных сведений о характере монотонности и непрерывности элементарных функций, изучаемых в школьном курсе математики.

Основная сложность в решении носит, скорее, психологический характер. Например, в системе

$$\begin{cases} 28x^3+13x^2-27x+6=0 \\ y\cdot\left(y+5,25x-0,5\right)^{7x+0,3}+1=y\left(4,5-\frac{1}{x}\right)+x^{3,7y}\cdot\sqrt{13(x-1)+\frac{36x^3-4(1-4x)^2}{x^2}} \end{cases}$$

казалось бы, стоит сначала решить «нестрашное» уравнение

$$28x^3+13x^2-27x+6=0.$$

Однако, с другой стороны, найти корень $x=\frac{2}{7}$, скажем, подбором или перебором всех делителей старшего и свободного коэффициентов – задача практически нерешаемая. Поэтому начинать решение следует именно со второго уравнения системы, а точнее – с нахождения области определения подкоренного выражения. Тогда множитель $(7x-2)^2$ появляется «сам собой».

При проверке работ обучающихся ни один из способов разложения многочлена на множители (если он верно выполнен) не считался «лучше», «правильнее» или «рациональнее» других, именно, имея в виду разнообразие возможных подходов в решениях заданий С5 вариантов КИМ этого года.

Приведем конкретный пример. Допустим, что нужно разложить на множители многочлен $49x^3-77x^2+32x-4$. Видимо, при любом из подходов следует убедиться, что x=1 является корнем: 49-77+32-4=0.

А) Метод группировки.

$$49x^3-77x^2+32x-4=49x^3-49x^2-28x^2+32x-4=$$
$$=49x^2(x-1)-28x^2+28x+4x-4=49x^2(x-1)-28x(x-1)+4(x-1)=$$
$$=(x-1)(49x^2-28x+4)=(x-1)(7x-2)^2.$$

Б) Деление уголком.

$$\begin{array}{r|l}
49x^3-77x^2+32x-4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{49x^3-49x^2} & 49x^2-28x+4 \\
-28x^2+32x & \\
\underline{-28x^2+28x} & \\
4x-4 & \\
\underline{4x-4} & \\
0 &
\end{array}$$

Значит, $49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(49x^2-28x+4)=(x-1)(7x-2)^2$.

В) Метод неопределенных коэффициентов.

Так как x=1 является корнем, то для некоторого квадратного трехчлена Ax^2+Bx+C верно

$$49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(Ax^2+Bx+C),$$
$$49x^3-77x^2+32x-4=Ax^3+(B-A)x^2+(C-B)x-C.$$

Значит, $A=49, C=4, B-A=-77, B=-28$. Тогда $C-B=32$ и

$$49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(49x^2-28x+4)=(x-1)(7x-2)^2.$$

Г) Схема Горнера.

	49	-77	32	-4
$x=1$	49	$49+1\cdot(-77)=-28$	$32+1\cdot(-28)=4$	$4+1\cdot(-4)=0=P(x)$

Значит, $x=1$ является корнем и

$$49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(49x^2-28x+4)=(x-1)(7x-2)^2.$$

Требуются ли от обучающегося в этом моменте решения какие-либо обоснования? Например, «представим –77, как –49–28» в А), или ссылка на теорему Безу в В), или какое-то описание схемы Горнера в Г)? Видимо, нет, не требуются: иначе требования к оформлению ученических решений грозят приблизиться к требованиям, предъявляемым к школьным учебникам по алгебре. Более того, весьма возможен случай, когда все вычисления проведены в черновике, а в работе приведен только вывод. Например, «Раскрывая скобки, легко проверить, что

$$49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(49x^2-28x+4).$$

Значит, $49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(7x-2)^2$.»

Такая запись считается верной: ошибок нет, метод указан, ответ верен. Аналогично и в схеме Горнера ученик может не выписывать все вычисления во второй строке, а ограничиться только приведением верных результатов. А вот текст «Так как

$$49x^3-77x^2+32x-4=(x-1)(7x-2)^2,$$

то…» очевидно излишне краток и сам по себе может вызвать серьезные сомнения в самостоятельности выполнения работы. В этом случае оценка выполнения задания зависит от контекста дальнейшего решения, приведенного обучающимся.

Для кубического уравнения со «сложным» рациональным корнем возможны все подходы А–Г и возможен также метод прямой проверки корня $x = \frac{b}{a}$ подстановкой. В некоторых вариантах КИМ этого оказывается достаточно, так как иногда возможно обойтись и без непосредственного вычисления двух других корней. Например, если уже найдена ОДЗ (x=7/5 или $0 \prec x \le 1$) подкоренного выражения во втором уравнении, то по отношению к первому уравнению системы можно поступить следующим образом:

«Если $x \ge 0$, то $10x^3 + 49x^2 + 59x + 14 \ge 14 > 0$, т.е. первое уравнение не имеет корней на промежутке $[0;+\infty)$. Проверим, что $x = -7/5$ - корень уравнения:

$$-\frac{10 \cdot 7^3}{125} + \frac{49 \cdot 7^2}{25} - \frac{59 \cdot 7}{5} + 14 = 0.$$

Другие корни (если они есть) не входят в ОДЗ правой части второго уравнения. Поэтому условию задачи может удовлетворять только корень x=7/5.

Как отмечено выше, шаг 3 решения задания С5 состоит в решении уравнения f(y)=g(y) с разнотипными элементарными функциями f и g. Разумеется, перейти к выполнению шага 3 можно, только выполнив первые два шага.

В случаях единственности решения системы идеальным вариантом представляется проверка всех условий теоремы о корне (если на отрезке [a; b] функции f и g непрерывны, имеют разный характер монотонности и (f(a) – g(a))(f(b) – g(b))$\prec$ 0, то на этом отрезке уравнение f=g имеет единственный корень). Так как представления о необходимости явного использования непрерывности (даже у подготовленных выпускников) весьма неустойчивы, то допускается (даже на 4 балла) замена такой ссылки эскизами графиков элементарных функций. Но явные указания на характер монотонности и на выбор подходящего отрезка на 4 балла необходимы.

В случаях более чем одного решения исходной системы уравнений требования по отношению к непрерывности сохраняются, а вот монотонность тут по существу не важна. Зато требуется указывать уже не один, а как минимум, два различных отрезка.

При доказательстве отсутствия решений системы уравнений непрерывность не существенна. Здесь основную роль играют оценки с помощью числовых неравенств и, быть может, с использованием монотонности функций.

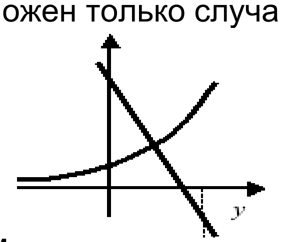
Приведём пример ситуации, когда возможно выставление 3 баллов.

Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x^3 + 13x^2 + 20x + 14 = 0 \\ (6x+17)^y - 5 = \frac{7y}{x} + 2^{x+y}\sqrt{9x(x+3)^2 - 3x^2 + 10x + 49} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1 и 2 шаги (они приведены ранее)… Поэтому возможен только случай x=-7/3.



После подстановки во второе уравнение получаем

$2^y - 5 = -3y, \quad 2^y = 5 - 3y.$ Построив графики левой и правой частей, видим, что есть единственный корень уравнения, а значит, и одно решение системы.

Комментарий. Нет проверки условий теоремы о корне, есть арифметическая ошибка (должно быть 3^y *), но, по сути дела, решение, предложенное обучающимся, демонстрирует понимание им сложившейся математической ситуации.*

Если решение ученика завершено утверждением «Поэтому возможен только случай x=-7/3», которое верно обосновано предыдущим текстом решения, то даже при отсутствии дальнейших шагов решения, допустимо выставление 2 баллов.

Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x^3+13x^2+20x+14=0 \\ (6x+17)^y-5 = \dfrac{7y}{x} + 2^{x+y}\sqrt{9x(x+3)^2-3x^2+10x+49} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1) $9x(x+3)^2-3x^2+10x+49 = 9x^3+51x^2+91x+49$.

Подстановкой проверяем, что $x=-1$ - корень: $-9+51-91+49=0$. Поэтому $9x^3+51x^2+91x+49=(x+1)(9x^2+Ax+B)$. Если $B=49$, $A=42$, то равенство можно проверить, раскрывая скобки, т.е. $9x^3+51x^2+91x+49= (x+1)(3x+7)^2$.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательно, т.е. $x=-7/3$ или $x\ge -1$.

2) Проверим, что $x=-7/3$ является корнем первого уравнения. Раскрывая скобки в правой части равенства $3x^3+13x^2+20x+14=(3x+7)(x^2+2x+2)$, видим, что оно верно. Второй сомножитель корней не имеет, так как $D \prec 0$. Поэтому система имеет решения только при x=-7/3.

Комментарий. Намеренно приведено решение без подробного описания того, как оно получено. Тем не менее, за такое (весьма краткое) решение выставляется 2 балла.

Наконец отметим маловероятную, но возможную ситуацию. В шагах 1 и 2 «специальный» корень $x=\dfrac{b}{a}$ найден неверно (допущены арифметические ошибки), он подставлен во второе уравнение, получено уравнение f(y)=g(y), отличное от того уравнения, которое возникает при верном решении, для этого «неверного» уравнения указано количество его корней. К сожалению, это скорее всего, 0 баллов, несмотря на то, что ответ может совпасть с верным ответом. Речь об 1 балле тут может идти, только если в шаге 3) «неверное» уравнение содержательно и верно исследовано.

Возможные решения заданий С5 по математике, представленные ниже, проведены по единой схеме. Однако в тех заданиях, где речь идёт о доказательстве отсутствия решений заданной системы уравнений, возможен более лаконичный способ решения. А именно, в шаге 2 не обязательно проводить проверку того, что изолированная точка, в которой определена правая часть второго уравнения системы, является корнем первого уравнения. Поэтому не является обязательным соответствующее обоснование шага 2, т.е. в зависимости от содержания задания ключевой момент б или в, указанный в приведённых ниже критериях проверки. Остальные ключевые моменты, выделенные в критериях, сохранены.

Задание С5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 6x^3+11x^2+13x+12=0 \\ 4+(3x+7)^{y-1}\left(y+2+\dfrac{4}{x}\right)=y+5^{3x+y}\cdot\sqrt{3x^2(3x+8)+9(x+1)^2+22x+7} \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение:

1) Преобразуем подкоренное выражение во втором уравнении системы:

$3x^2(3x+8)+9(x+1)^2+22x+7 \;=\; 9x^3+33x^2+40x+16$.

Число $x=-1$ является корнем, так как $-9+33-40+16=0$. Поэтому двучлен $(x+1)$ можно выделить множителем, например, методом группировки:

$$9x^3+33x^2+40x+16=9x^2(x+1)+24x(x+1)+16(x+1) \;=$$
$$=(x+1)(9x^2+24x+16) \;=\; (x+1)(3x+4)^2.$$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательно, т.е. $x=-4/3$ или $x\ge -1$.

2) Исследуем функцию $f(x)=6x^3+11x^2+13x+12$. Найдем производную: $f'(x)=18x^2+22x+13$. Так как $18>0$ и $\dfrac{D}{4}=11^2-18\cdot 13<0$, то $f'(x)>0$ для всех x. Значит, функция $f(x)=6x^3+11x^2+13x+12$ возрастает и поэтому первое уравнение системы имеет не более одного корня. Проверим, что $x=-4/3$ является корнем первого уравнения системы:

$$-\frac{6\cdot 4^3}{27}+\frac{11\cdot 4^2}{9}-\frac{13\cdot 4}{3}+12=\frac{4(-32+44-39+27)}{9}=0.$$

Поэтому, система может иметь решения только при $x=-4/3$.

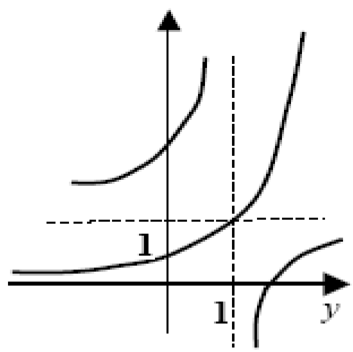
3) Тогда $3x+7=3$, $y+2+\dfrac{4}{x}=y-1$ и второе уравнение системы имеет вид $4+3^{y-1}(y-1)=y$. Число $y=1$ не является его корнем. Поэтому

$3^{y-1}=\dfrac{y-4}{y-1}$, $3^{y-1}=1-\dfrac{3}{y-1}$.

Если $y<1$, то $y-1<0$ и $1-\dfrac{3}{y-1}>1>3^{y-1}$.

Аналогично, если $y>1$, то $1-\dfrac{3}{y-1}<1<3^{y-1}$.

Значит, уравнение не имеет корней, а система не имеет решений.



Замечание.

В шаге 2) можно обойтись и без производной, разложив на множители $6x^3+11x^2+13x+12=(3x+4)(2x^2+x+3)$ *и указав, что второй множитель корней не имеет. Тогда в критериях проверки следует изменить ключевой момент б).*

Критерии оценки решения вышеприведённого задания С5 позволили оценить его по следующей шкале:

<u>4 балла</u>: Приведена верная последовательность всех шагов доказательства:

1. Преобразование подкоренного выражения второго уравнения системы, нахождение ОДЗ корня;
2. Исследование первого уравнения системы;
3. Исследование уравнения относительно *y*, полученного при подстановке x=-4/3 во второе уравнение системы.

Обоснованы все моменты доказательства:

а) в шаге 1 есть ссылка на неотрицательность подкоренного выражения;

б) имеется ссылка на положительность производной функции *f* и на возрастание этой функции;

в) приведена проверка того, что x=-4/3 является корнем первого уравнения системы (подстановка, деление «уголком», схема Горнера, разложение на множители,...);

г) в шаге 3 отсутствие корня обосновано сравнением значений левой и правой частей уравнения для произвольных значений аргумента.

Все преобразования и вычисления верны. Доказательство завершено полностью.

<u>3 балла</u>: Приведена верная последовательность всех шагов доказательства. В шаге 3 допустимо обоснование отсутствия корней с помощью эскизов графиков, т.е. без обоснования ключевого момента г. Обоснованы ключевые моменты а – в. Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в одном из шагов 2 или 3. Доказательство завершено полностью.

<u>2 балла</u>: Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов доказательства. Выполнены шаги 1 и 2. Указано, что система может иметь решения только при X=-4/3. Допустимо, что уравнение относительно *y* не исследовано. Обоснованы ключевые моменты б и в. В шагах 2 и 3 допустимы 1–2 негрубые ошибки или описки в вычислениях, не влияющие на правильность дальнейшего хода доказательства. В результате доказательство может быть не завершено.

<u>1 балл</u>: Общая идея, ход доказательства верны. Выполнен шаг 1: верно найдена ОДЗ корня в правой части второго уравнения. Допустимо, что дальнейшее доказательство не завершено, а ключевые моменты не обоснованы.

<u>0 баллов</u>: Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Из приступивших (примерно 1,3%) выпускников 1,1% с ним справились, из них 0,2% получили 3 балла, а 0,9% - 4 балла.

ГЭК по математике выделены следующие ошибки и недочёты, допущенные обучающимися при выполнении задания С5:

- решив первое уравнение системы, не смогли провести анализ её второго уравнения;
- предложенные методы решения однообразны: либо метод подбора с использованием теоремы о корнях многочлена, имеющего на концах отрезка значения разных знаков, либо применение производной к исследованию функции и обоснование единственности корня многочлена;
- неумение выполнять действия с обыкновенными дробями.

Кроме того, школьники оказались не готовы к тому, что многочлен может иметь дробные корни, и хотя им и удалось правильно определить отрезок, содержащий его корень, сам корень найти не смогли.

В целом же, задание С5 проверяло фактически лишь сформированность умений и навыков решения двух тематически одинаковых алгебраических уравнений третьей степени.

Выводы и рекомендации

Итоги ЕГЭ по математике в 2007 г. позволили выделить некоторые тенденции, характерные для состояния математической подготовки обучающихся образовательных учреждений Мурманской области.

В каждый вариант экзаменационной работы в 2007 году (как и в 2006 г.) было включено 26 заданий разного уровня сложности, с помощью которых проверкой была охвачена представительная часть основных элементов содержания минимума школьного математического образования. Это позволило получить достоверные показатели (количественные данные и связанные с ними измерители) овладения обязательными требованиями программы и стандарта математического образования. Эти показатели позволяют конкретизировать достижение указанных требований с помощью системы заданий базового уровня сложности, доступных или, наоборот, недоступных для овладения большинством обучающихся массовой общеобразовательной школы.

Открытость требований к базовой математической подготовке выпускников средней (полной) школы (описание в открытой печати образцов заданий, характеризующих эти требования) способствует совершенствованию овладения выпускниками программных требований, о чем свидетельствуют более высокие результаты выполнения базовых заданий по курсу алгебры и начал анализа. Так, например, даже в группе самых слабых обучающихся, которые по-прежнему показывают невысокий уровень овладения проверяемым обязательным минимумом содержания среднего (полного) общего образования по математике, наблюдается увеличение процента обучающихся, овладевших отдельными базовыми умениями.

Результаты 2007 года, как и в 2003-2006 гг., показали значительные различия в уровне математической подготовки, продемонстрированной участниками экзамена. С большинством заданий, характеризующих состояние базовой подготовки по курсу алгебры и начал анализа, включенных в различные варианты работы, в 2007 г. справилось 47-87% (2006 г. – 45-87%) обучающихся. При этом качество знаний обучающихся 2007 года, характеризующее уровень сформированности базовых умений и навыков, составило 78,4%. Данный показатель существенно выше аналогичного показателя 2006 г. на 9,1%. Представленный выше анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ части 1, позволил зафиксировать допустимый уровень базовой подготовки по курсу алгебры и начал анализа.

С алгебраическими заданиями повышенного уровня в зависимости от их сложности в целом справились 12-44% (2006 г. 14-37%). Таким образом, по сравнению с 2006 годом в 2007 году выявилась тенденция незначительного роста результатов выполнения алгебраических заданий повышенного уровня, также обучающиеся продемонстрировали стабильный уровень выполнения вышеуказанных заданий базового уровня.

С алгебраическими задачами повышенного (С1 и С2) и высокого уровня сложности (С3 и С5), включенными в работу с целью выделения наиболее подготовленных обучающихся, успешно справилось в среднем 20% и 3,5% обучающихся соответственно. Эти показатели стабильны на протяжении трёх последних лет эксперимента в Мурманской области.

Успешное выполнение обучающимися заданий повышенного уровня сложности (С1 и С2) и высокого (С3) позволяет утверждать, что эти выпускники могут применить свои знания в измененной ситуации и математически грамотно записать полученное решение. Полученные результаты соответствуют реальному проценту выпускников, подготовка которых оценивается самой высокой школьной оценкой («5»). Таким образом, включение (третий раз) в варианты КИМов заданий повышенного уровня, требующих записи решения, оправдало себя, так как позволило участникам ЕГЭ, имеющим высокую математическую подготовку на школьном уровне, показать достижение этого уровня.

Результаты выполнения алгебраических заданий С1, С2, С3 показывают, что с их введением в варианты КИМ-2005 - КИМ-2007 удалось осуществить плавный переход от заданий повышенной сложности к заданиям высокой и самой высокой сложности.

Результаты выполнения самого сложного задания (С5) несколько ниже, чем в 2006 году (в соответствии с распределением статистической трудности заданий ЕГЭ по Мурманской области в 2007 году лишь 1% обучающихся справился с его решением, а в 2006 году – 4%), что, возможно, свидетельствует о некотором снижении уровня подготовки группы самых сильных выпускников.

5. С большинством геометрических заданий повышенного уровня по планиметрии и стереометрии справилось примерно одинаковое количество обучающихся: 8,5% (2006 г.- 7%). Таким образом, имеет место наметившаяся в прошлом учебном году тенденция некоторого выравнивания соответствующей планиметрической и стереометрической подготовки выпускников.

За стереометрическое задание высокого уровня (С4) получили высокие 3-4 балла 2% обучающихся (в 2006 г. – 1%).

Тем не менее, как и в предыдущие годы, участники экзамена 2007 года по математике показали низкие результаты при решении геометрических задач. При интерпретации этих результатов следует иметь в виду, что часть обучающихся, не заинтересованных в получении свидетельства о сдаче ЕГЭ по математике для поступления в вузы или ссузы, скорее всего, просто пропустили эти задания. В этой связи не представляется возможным распространять полученные результаты на всю совокупность обучающихся общеобразовательных учреждений.

6. Состояние математической подготовки участников экзамена характеризуют процентные соотношения обучающихся, продемонстрировавших принятые вузами различные уровни подготовки. Эти данные представлены в таблице 17.

Процент участников экзамена, показавших различные уровни математической подготовки при выполнении КИМ в Мурманской области за период с 2004 по 2007 г.

Таблица 17

Год	100 баллов	91-100 баллов	Пятибалльная шкала								Средний балл
			«5»		«4»		«3»		«2»		
			Интервал тестовых баллов (% выпускников, набравших соответственный тестовый балл)								
2004	1	41 (0,4%)	75-100	7,3	56-74	30,38	38-55	39,6	0-37	22,67	50,6
2005	1	22 (0,24%)	75-100	7,1	56-74	32,3	38-55	43,1	0-37	17,6	50,7
2006	-	6 (0,08%)	72-100	9,4	54-71	35,7	38-53	38,3	0-37	16,6	48,9
2007	-	6 (0,09%)	72-100	11,8	54-71	38,9	38-53	36,6	0-37	12,7	52,5
	Россия		72-100	9,7	54-71	33,5	38-53	35,7	0-37	21,1	

В 2007 г. значительно снизился (примерно на 4%) процент обучающихся, показавших «неудовлетворительную» подготовку, и в среднем на 2,8% увеличился процент выпускников, показавших «хороший» и «отличный» уровни подготовки. Результаты по Мурманской области в 2007 г. (в соответствии с результатами ЕГЭ в разных системах оценивания) превышают соответствующие общероссийские показатели. Таким образом, наблюдается положительная динамика результативности овладения математическими умениями и навыками в 2007 г., хотя различия в распределении обучающихся по выделенным уровням подготовки в эти годы невелики.

Тем не менее, ни один участник экзамена за последние два года эксперимента не набрал 100 баллов и значительно сократилось количество выпускников, набравших выше 90 баллов.

Следует отметить, что в 2007 г. наблюдается более объективная картина соответствия годовых и экзаменационных отметок по математике: подтвердили годовые отметки 72,7% , что выше на 16% аналогичных показателей 2006 г.; отметка ЕГЭ выше у 15,2% (2006 г.- у 13,3%), а 12,1% понизили её, что по сравнению с прошлым годом на 17,9% меньше.

Проанализировав результаты экзамена по математике в форме ЕГЭ в 2007 году, государственная экзаменационная комиссия по математике констатирует, что обучающиеся, как и за период эксперимента с 2003 по 2006 гг., удовлетворительно овладели знаниями и умениями, предусмотренными обязательным минимумом содержания математического образования и требованиями к уровню подготовки.

В ходе анализа результатов ЕГЭ 2007 г. предметная экзаменационная комиссия отмечает, что хорошо сформированы умения выполнять на базовом уровне следующие проверяемые элементы Федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего и среднего (полного) общего образования: тождественные преобразования иррациональных выражений и логарифмических выражений, решение простейших уравнений и неравенств. Наметилась положительная тенденция в овладении методами решения тригонометрических и иррациональных уравнений. С преобразованиями тригонометрических выражений и выражений, содержащих степень с рациональным показателем, обучающиеся справились примерно на том же уровне. Обучающиеся 2007 г. на оптимальном уровне усвоили как технику «чтения» основных свойств функции, так и распознавание видов элементарных функций (81% обучающихся продемонстрировали безошибочное овладение умениями и навыками графического иллюстрирования свойств функций).

Результаты ЕГЭ высветили ряд существенных недочётов в подготовке обучающихся:

а) низкий уровень вычислительной культуры обучающихся и сформированности математических умений и навыков по курсу «Геометрия»;
б) формально усваивается теоретическое содержание курса, поэтому обучающиеся не могут применить изученное в ситуации, которая даже незначительно отличается от стандартной;
в) неумение рефлексировать собственную деятельность: у многих обучающихся отсутствуют навыки самоконтроля, что зачастую приводит к появлению ответов, невероятных в рамках условия решаемой ими задачи;
г) недостаточно сформированы представления о межпредметных и внутрипредметных связях математики;
д) на недостаточном уровне усвоено содержание важных разделов курса математики средней (полной) школы: «Тригонометрия», «Нахождение свойств функций, заданных аналитически», «Решение комбинированных уравнений», «Исследования функции с помощью графика производной функции».

Анализ ЕГЭ позволяет высказать некоторые общие рекомендации, направленные на совершенствование процесса преподавания математики и подготовку обучающихся средней (полной) школы:

- При организации учебного процесса уделить особое внимание:
  а) повторению и обобщению следующих элементов содержания: рациональных приёмов выполнения тождественных преобразований, методов и приёмов аппарата уравнений, неравенств, систем, как основного средства математического моделирования прикладных задач;
  б) комбинированным задачам, для решения которых требуются знания по нескольким темам, и задачам с нестандартными формулировками;

в) усвоению аппарата дифференциального исчисления и повышению функциональной подготовки обучающихся средствами алгебры и математического анализа;
г) использованию, наряду с тестовыми формами контроля, и традиционных методов форм проверки знаний обучающихся с привлечением учебно-методических комплектов;
д) усилению практической направленности в применении изучаемых математических понятий и различных математических моделей для разрешения математических проблем и проблем, близких к реальным;
е) систематическому обучению обучающихся рациональным приёмам работы с различными типами контролирующих заданий;
ж) использованию методик, способствующих более успешной реализации компетентностного подхода к обучению математике, а также совершенствованию методики по формированию базовых умений;
з) усилению требования к геометрической подготовке выпускников, делая акцент на теоретико-обосновательную сторону решения вычислительных стереометрических задач; расширить круг задач на комбинацию нескольких тел и соотношения между характеристиками частей одного тела, а также уделить внимание целенаправленному формированию умений выполнять построения следов и сечений.

- Администрациям общеобразовательных учреждений изыскать возможность выделения в учебном плане часов компонента образовательного учреждения для организации дифференцированной подготовки обучающихся к ЕГЭ по математике.
- Расширить тематику факультативных и элективных курсов для обучающихся по предметам образовательной области «Математика».
- Совершенствовать методику формирования базовых предметных умений и навыков посредством внедрения деятельностного подхода в процесс обучения математике.
- Продолжить организацию мониторинговых исследований достижения Федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего и среднего (полного) общего математического образования.
- С учётом государственных образовательных стандартов 2004 года запланировать проведение работ по созданию банка заданий, отвечающих требованиям профильного стандарта и позволяющих зафиксировать овладение проверяемого элемента содержания на разных уровнях усвоения.
- Обеспечить участников образовательного процесса нормативными и учебно-методическими материалами как на бумажных, так и электронных носителях.

Для заметок:

Автор-составитель

Наталья Алексеевна МАЛАХОВА

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ
ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
ПО МАТЕМАТИКЕ
В МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
В 2007 ГОДУ

Редактор **Н.Б. Лившиц**

Электронная вёрстка:

Федотов Д.А., Стратий Т.И.

Подписано в печать 08.11.2007. Формат 60х84/16. Уч.-изд. л. 15,5.
Тираж 500 экз. Заказ ____

Отпечатано в МОИПКРОиК.
183031, г. Мурманск, ул. Подстаницкого, 1.